Colle du 7 novembre: Suites et séries de fonctions

6.1 Première série

Exercice 1: Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(nx)}$. Donner le domaine de définition de f, déterminer si f est de classe C^1 sur son intervalle de définition, et donner des équivalents de $f(x)$ en 0 et en $+\infty$.

Exercice 2: *(Classique)* Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout entier naturel k on a $\int_a^b f(t)t^k dt = 0$. La fonction f est-elle nécessairement identiquement nulle?

Exercice 3: *(Classique)* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $a \geq 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq a$$

Montrer qu'il existe une unique fonction linéaire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une unique fonction bornée $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f = g + h$.

Exercice 4: Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions telle que pour toute suite convergente (x_n) de $[0,1]$ la suite $(f_n(x_n))$ converge. Étudier la suite (f_n).

6.2 Deuxième série

Exercice 1: Soit (a_n) une suite de $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante divergente vers $+\infty$. Pour $t > 0$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n t}$. A-t-on nécesairement $\int_{\mathbb{R}_+^*} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$?

Exercice 2: *(Classique)*
1. Soit $f : x \to 2x(1-x)$. Montrer que la suite (f^n) (où $f^n = f \circ f \circ ... \circ f$) converge uniformément sur tout compact de $]0,1[$ vers la constante égale à $1/2$.
2. Soit I un intervalle compact contenu dans $]0,1[$. Montrer que toute fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3: Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{|\sin k|}{k}$.

6.3 Troisième série

Exercice 1: La fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ est-elle dérivable en 0?

Exercice 2: *(Classique)* Soit une suite (f_n) de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
1. Soit $k > 0$. Supposons que les f_n sont k-lipschitziennes et que la suite (f_n) converge simplement. Montrer que la convergence est uniforme.
2. Soit $M \geq 0$. Supposons que les f_n sont de classe C^1 et que $\forall x \in [0,1], |f(x)| + |f'(x)| \leq M$. Montrer qu'il existe une suite extraite de (f_n) qui converge uniformément.

Exercice 3: Montrer que tout fermé de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des zéros d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.